

# ज्ञान दृष्टि

## पूर्णांक संख्या



अप्रैल 2020

अंक 6

शशिधर उज्ज्वल

प्रिय पाठकों,

‘ज्ञान दृष्टि’ का छठा अंक ‘संख्या’ आपके समक्ष प्रस्तुत है। ‘टीचर्स ऑफ बिहार’ ‘ज्ञान दृष्टि’ के माध्यम से पाठ्यचर्या से जुड़ी किसी एक खास टॉपिक पर आपका ज्ञानवर्द्धन तथा रोचक तथ्यों को प्रस्तुत करने को प्रयासरत है। उम्मीद है यह अंक बच्चों और पाठकों के ज्ञानवर्द्धन में मददगार सिद्ध होगा।

“गणित की शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बच्चे की गणितीयकरण की क्षमताओं का विकास करना है। स्कूली गणित का सीमित लक्ष्य है ‘लाभप्रद’ क्षमताओं का विकास, विशेषकर अंक ज्ञान-संख्या से जुड़ी क्षमताएँ, सांख्यिक संक्रियाएँ, माप, दशमलव व प्रतिशत। इससे उच्च लक्ष्य है बच्चों के साधनों को विकसित करना ताकि वह गणितीय ढंग से सोच सकें व तर्क कर सकें, मान्यताओं के तार्किक परिणाम निकाल सकें और अमूर्त को समझ सकें।”  
—राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा।

दैनिक जीवन में भूमितल से पहाड़ की ऊँचाई, आबादी में वृद्धि, समुद्रतल से ऊँचाई, औसत से अधिक वर्षा, व्यापार में लाभ अथवा हानि, शून्य से अधिक तापमान, कुएं की गहराई, शून्य से नीचे या कम तापमान, सेंसेक्स में गिरावट, महंगाई में वृद्धि आदि कई शब्दों से हमारा सामना होता है। कभी— कभी इन सभी को गणितीय भाषा तथा संकेतों में व्यक्त भी करना पड़ता है, जिसके लिए हमें पूर्णांक संख्याओं का ज्ञान आवश्यक है तो आइये, इस अंक में हम पूर्णांक संख्याओं की समझ विकसित करने का प्रयास करेंगे।

पिछले अंक में हमने संख्याओं के विभिन्न प्रकारों के बारे में चर्चा किया था। आप प्राकृत संख्याओं और पूर्ण संख्याओं से परिचित हो चुके हैं। उनमें यदि ऋणात्मक संख्याएं जोड़ लें तो? शून्य के दायीं ओर प्राकृत संख्याएँ हैं और बायीं ओर ऋणात्मक संख्याएं। धनात्मक संख्याएं, ऋणात्मक संख्याएं तथा शून्य को मिलाकर पूर्णांक बनते हैं।

**पूर्णांक संख्या—** पूर्ण संख्याओं में यदि ऋणात्मक पूर्ण संख्याओं के समूह को मिला लिया जाय तो ऐसी संख्याएं पूर्णांक संख्या कहलाती है।

जैसे—  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \infty$

पूर्णांक संख्याओं को **I** या **Z** से प्रदर्शित किया जाता है। अर्थात्

**I** अथवा **Z** = पूर्णांक संख्याओं का समूह =  $[-\infty, \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty]$

['Z' शब्द की उत्पत्ति जर्मन शब्द 'Zahlen', से हुई है जिसका अर्थ है— 'गिनना']

जिस प्रकार सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं है उसी प्रकार सबसे बड़ी पूर्णांक भी नहीं है। क्या आप सबसे छोटी पूर्णांक सोच सकते हैं ?

- कोई ऐसा पूर्णांक नहीं है जिसे सबसे बड़ा कहा जा सके। कितना भी बड़ा पूर्णांक आप सोचें, उससे भी बड़े पूर्णांक का अस्तित्व होता है।
- कोई ऐसा पूर्णांक नहीं है जिसे सबसे छोटा कहा जा सके। कितना भी छोटा पूर्णांक आप सोचें, उससे भी छोटा पूर्णांक का अस्तित्व होता है।
- **धनात्मक पूर्णांक**—  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, \infty\}$  आदि धनात्मक पूर्णांक हैं।  
 $\mathbb{Z}^+ =$  धनात्मक पूर्णांक के समूह  
 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots, +\infty\}$   
 भूमितल से पहाड़ की ऊँचाई, आबादी में वृद्धि, समुद्रतल से ऊँचाई, औसत से अधिक वर्षा, व्यापार में लाभ, शून्य से अधिक तापमान आदि को धनात्मक पूर्णांक संख्या में व्यक्त करते हैं।
- **ऋणात्मक पूर्णांक**—  $\{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$  आदि ऋणात्मक पूर्णांक हैं।  
 $\mathbb{Z}^- = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1\}$   
 कुएं की गहराई, व्यापार में हानि, शून्य से नीचे या कम तापमान आदि को ऋणात्मक पूर्णांक संख्या में व्यक्त करते हैं।
- **सम पूर्णांक**— वैसी पूर्णांक संख्या जो 2 से पूर्णतः विभाजित हो जाये, सम पूर्णांक संख्या कहलाती है। जैसे—  $\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots$  इत्यादि।
- **विषम पूर्णांक**— वैसी पूर्णांक संख्या जो 2 से पूर्णतः विभाजित न हो, विषम पूर्णांक संख्या कहलाती है। जैसे—  $\dots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots$  इत्यादि।

- अभियुक्ति—**
- (i) '0' (शून्य) न तो धन पूर्णांक है, न ही ऋण पूर्णांक है।
  - (ii) '0' (शून्य) के बाद की संख्याएं बढ़ते क्रम में हैं।
  - (iii) '0' (शून्य) के पूर्व की संख्याएं घटते क्रम में हैं।
  - (iv) '0' (शून्य) प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा तथा प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा होता है।
  - (v) धनात्मक पूर्णांकों में यदि  $a > b$  तो ऋणात्मक पूर्णांकों में  $-a < -b$  होगा।

### पूर्णांकों के गुण—

पूर्णांकों को जोड़ने में उन सभी गुणों का पालन होता है। जिनका पूर्ण संख्याएं पालन करती हैं।

1. दो पूर्णांकों का योग एक पूर्णांक ही होगा।
2. सभी पूर्णांकों के योग में क्रम विनिमय नियम लागू होता है।
3. दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक संख्या होती है, यही पूर्णांकों के योग के लिए संवरक नियम है।
4. पूर्णांकों में शून्य जोड़ने पर उनके मान में कोई परिवर्तन नहीं आता है।

### ऋणात्मक संख्याओं की आवश्यकता

आइए, एक और उदाहरण देखें— दो किलोग्राम दाल लेने के लिए संजीव के पास 40 रुपये थे। दाल का भाव 19 रुपये प्रति किलोग्राम से दो किलोग्राम दाल का दाम 38 रुपये हुआ। संजीव ने 40 रुपये दिए, किन्तु दुकानदार के पास छूट्टे रुपये नहीं थे। उसने 2 रुपये बाद में देने के लिए कह कर अपनी डायरी में लिखा 2 रुपये, अर्थात् उसे संजीव को 2 रुपये देने हैं। अगले दिन संजीव 1 किलो चावल खरीदने आया, उसके पास 50 रुपये थे। चावल का मूल्य था 57 रुपये प्रति किलो। दुकानदार ने डायरी में 2 रुपये लिखा था उसके पास संजीव के  $50 + 2 = 52$  रुपये थे। अब भी दुकानदार को संजीव से  $57 - 52 = 5$  रुपये लेने थे। संजीव बाकी रुपये कल देने के लिए कह कर चला गया। दुकानदार सोच में पड़ गया कि अब वह अपनी डायरी में कैसे लिखे, क्योंकि अब तो रुपये उसे लेने थे। अगर वह

डायरी में लिखता है '5' तो उसे बाद में लगेगा यह रुपये तो देने हैं। इस तरह उसने लिखा ऋण 5 ('-5'), मतलब, उसे ये पैसे लेने हैं।

ऐतिहासिक रूप से/गणितज्ञों ने ऋणात्मक संख्याओं की जरूरत तब महसूस की, जब वह छोटी संख्या में से बड़ी संख्या को घटाने लगे जैसे—  $4x + 10 = 2$  समीकरण को हल करने में यूनानी गणितज्ञ डायोफैटस ने इस और ऐसे अन्य समीकरणों को 'absurd' (यानी 'बेतुका') कहा क्योंकि इसका हल  $x = -2$  ही आ सकता है, जो उस समय एक 'बेतुकी' संख्या थी। धीरे-धीरे गणितज्ञों ने नयी संख्याएं निर्मित की और इस तरह के समीकरणों का हल करने लगे। इस सबसे धीरे-धीरे ऋणात्मक संख्याएं व उन पर संक्रियाएं उभरीं।

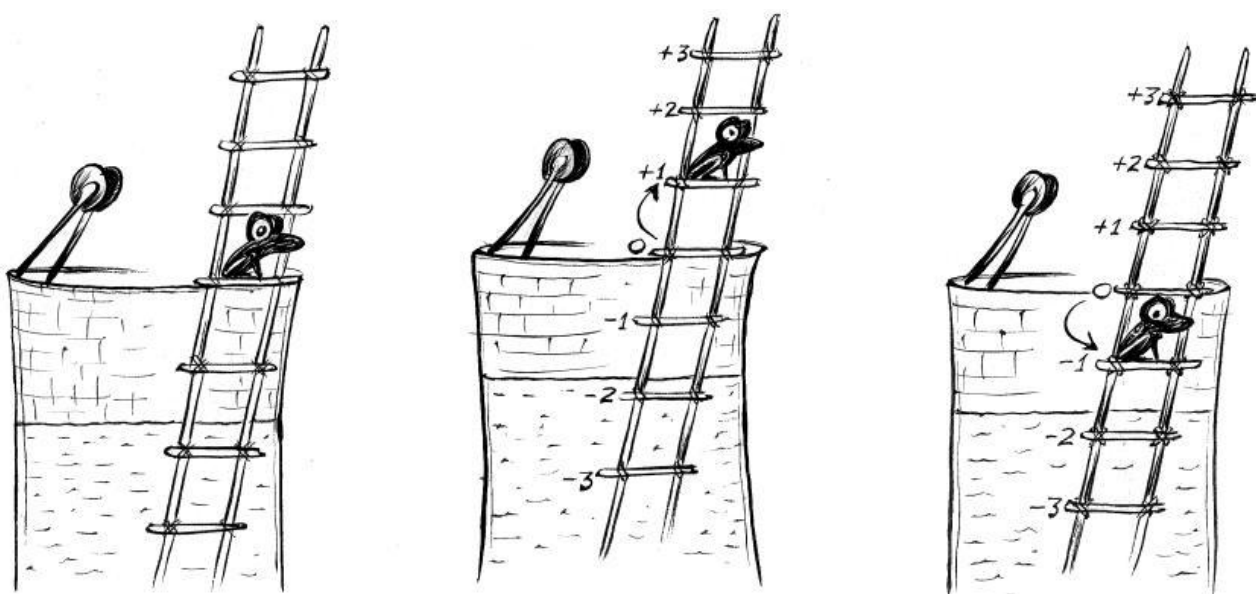
ब्रह्मगुप्त ऐसी संख्याओं के इस्तेमाल को दर्ज करने वाले पहले भारतीय गणितज्ञ थे। उन्होंने इन संख्याओं पर संक्रियाएँ लागू करने के नियमों को भी बताया। ऋणात्मक संख्याएँ बनने से धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं के बीच फर्क करना जरूरी हो गया। लिखी संख्या को देख कैसे पता चले की यह धनात्मक है अथवा ऋणात्मक। शुरु में 'ऋण 3' को दर्शाने के लिए m3 आदि प्रतीकों का उपयोग होता था अब 'ऋण 3' को दर्शाने का तरीका सरल हो गया है अब यह '-3' है।

### ऋणात्मक संख्या क्या है?

बच्चों को 'ऋणात्मक संख्या' सिखाने में बहुत दिक्कत होती है। जब बच्चों से यह पूछा जाता है कि ऋणात्मक संख्याएं क्या हैं, तो वे कहते हैं कि वे संख्याएं जो शून्य के पहले आते हैं। जाहिर है उनका आशय संख्या रेखा पर ऋणात्मक संख्याओं के स्थान (position) से होता है। कई बार वह ऋणात्मक संख्याओं को छोटी मान कर उन्हें दशमलव भिन्नों याने एक के टुकड़े के रूप में मानने लगते हैं। इसीलिए शिक्षकों के सामने भी यह प्रश्न होता है कि बच्चों को ऋणात्मक संख्याएँ कैसे सिखाएँ?"

आइए, एक कहानी के माध्यम से इसे समझते हैं।

"एक कुएँ में बाँस की एक सीढ़ी खड़ी थी। सीढ़ी का आधा भाग कुएँ की मुंडेर पर था। बाँस की सीढ़ी पर हर एक फुट पर गाँठ थी। एक मेंढक कुएँ की मुंडेर पर बैठा था, वह कभी छलांग लगाकर बाँस की सीढ़ी पर ऊपर चढ़ता था तो कभी बाँस की सीढ़ी पर नीचे कूदता। चाहे वह नीचे कूदे अथवा ऊपर छलांग लगाए, वह एक बार में एक गाँठ चलता था।



चित्र: ऋणात्मक संख्याओं को समझना

### अब जरा बताइये—

- (1) 'यदि मेंढक 2 पायदान ऊपर चढ़े और फिर 5 पायदान और ऊपर चढ़े तो वह कहाँ होगा?
- (2) यदि मेंढक मुँडेर से 5 पायदान ऊपर चढ़े और फिर 5 पायदान नीचे कूदे तो मेंढक कहाँ होगा?
- (3) 'यदि मेंढक मुँडेर से 3 पायदान नीचे कूदे तो वह कहाँ होगा?

पहले प्रश्न के जवाब में आप कहेंगे कि मेंढक 7 पायदान ऊपर चढ़ा। अब आप 'ऊपर-नीचे' शब्द को छोड़, ऊपर 7 के लिए +7 और 'नीचे' की जगह '-' चिह्न इस्तेमाल करें। यह स्पष्ट है कि 'नीचे' वाली संख्याओं के साथ '-' चिह्न और 'ऊपर' वाली संख्याओं के साथ (+) लगाना जरूरी है ताकि उन्हें अलग पहचाना जा सके।

इस प्रकार, आप देखेंगे कि -15, -5 के मुकाबले शून्य से ज्यादा दूर है पर वह -5 से छोटी है। यानी कि -5 से 3 तक पहुँचने के लिए 8 पायदान ऊपर चढ़ना होता है।

### ऋणात्मक संख्याओं का जोड़

12 वर्षीय सुनैना बोतल के ढक्कनों के साथ खेल रही थी। उसने एक बर्तन में बोतल के एक ढक्कन को डाला। फिर उसने उसे निकाल लिया। इससे उसे समझ आ गया कि '+1 और -1 एक-दूसरे को रद्द कर देते हैं'। उसने इस बात को इस तरह लिखकर दिखाया  $(+1) + (-1) = 0$ । अब उसने सोचा कि  $(+2) + (-2)$  कितना होगा? उसने बोतल के ढक्कनों का उपयोग करके उत्तर निकाल लिया, शून्य।  $(+3) + (-3) = ? 0$ । इस प्रकार से वह धीरे-धीरे समझ गयी कि

**किसी भी धनात्मक संख्या  $n$  के लिए  $(+n) + (-n) = 0$  होता है।**

अब उसने  $(-3) + (-2)$  जैसे जोड़ पर जाने का फैसला की। वह इसे नहीं कर सकी। सुनैना अपनी समस्या लेकर शिक्षिका के पास पहुँची। शिक्षिका ने उसे ढक्कनों को उल्ट कर -3 दर्शाने से शुरू किया।

“अब दूसरे ढक्कनों से -2 दिखाओ”, शिक्षिका बोलीं। उसने कर दिया।

“शाबाश! अब इनको मिला दो। कितना आया?” उसने उन्हें मिला दिया और कहा कि 5 आए।

“पक्की बात है? ज़रा देख लो ढक्कनों के मुँह किस तरफ हैं,” शिक्षिका ने उसे याद दिलायी।

“ओह, हाँ, -5” अपनी गलती पहचानते हुए सुनैना बोली।

फिर शिक्षिका ने उससे कहा कि उसने जो कुछ किया है उसे गणितीय प्रतीकों में लिख लो। थोड़ी मदद के बाद उसने लिख लिया :  $(-3) + (-2) = -5$ ।

उन्होंने इसी तरह के कुछ और उदाहरण किए। वे उससे साथ-साथ हल लिखने को कहती गईं। फिर धीरे-धीरे एक सूची बन गई—

$$(-3) + (-2) = -5$$

$$(-1) + (-3) = -4$$

$$(-2) + (-3) = -5$$

∴ ∴

∴ ∴

इस सूची को देखकर, और थोड़ी मदद के बाद, वह एक पैटर्न पहचानने लगी। इस पैटर्न के आधार पर वह ऋणात्मक संख्याओं के जोड़ के नियम तक पहुँच गयी— “पहले मैं सिर्फ संख्याओं को जोड़ लेता हूँ और फिर जोड़ के पहले ऋण चिह्न लगा देता हूँ।” शिक्षिका बोली कि वह अपनी बात एक उदाहरण से समझाए। तो सुनैना उन्हें बतायी कि  $(-10) + (-5)$  का उत्तर निकालने के लिए वह पहले 10 और 5 को जोड़कर 15 प्राप्त कर लेती है और फिर इसके सामने ऋण चिह्न लगाएगी तो उत्तर -15 मिल जाएगा।

इस तरह से वह खुद ही उस नियम तक पहुँच गयी, जिसे बीजगणित में हम यों लिखते हैं—

$$(-m) + (-n) = -(m + n), \text{ जहाँ } m \text{ व } n \text{ धनात्मक संख्याएँ हैं।}$$

### ऋणात्मक संख्याओं का घटाव

सबसे पहले देखते हैं कि पूर्णाकों को घटाने की प्रक्रिया को सीखने में कौन से चरण शामिल हैं। ये हैं—

(i) प्राकृतिक संख्या को घटाना (मसलन,  $4-10$ ,  $10-4$  या  $-10-4$ ),

(ii)  $-(-n) = n$ , जहाँ  $n$  कोई धनात्मक संख्या है (जैसे  $-(-5) = 5$ ),

(iii) ऋणात्मक संख्या को घटाना [जैसे  $5 - (-6)$  या  $-5 - (-6)$ ]

यहाँ बच्चों को यह समझाने के लिए कि  $-(-n) = n$  होता है, 'ऊपर-नीचे' वाला मॉडल इस्तेमाल कर रहा हूँ। अब जरा यह बताइये कि, 4 ऊपर का उल्टा क्या होगा?

"4 नीचे।"

"और '4 नीचे' का उल्टा?"

"4 ऊपर।"

"तो यदि हम '4 ऊपर' को 4 लिखें और '4 नीचे' को  $-4$  लिखें, तो 4 का उल्टा क्या होगा?"

शायद आपका जवाब होगा,  $-4$

इसी प्रकार,

10 का उल्टा,  $-10$

3 का उल्टा,  $-3$

5 का उल्टा,  $-5$ , वगैरह।

इस सूची के आधार पर इस निष्कर्ष पर पहुँच जाते हैं कि किसी धनात्मक संख्या का उल्टा पता लगाने के लिए उसके पहले ऋण चिह्न लगा देते हैं।

अब इसी नियम को आगे बढ़ाकर ऋणात्मक संख्याओं पर लागू करें तो  $-5$  का उल्टा क्या होगा?"

आपको याद दिला दूँ कि, " $-5$  यानी '5 नीचे' होता है। तो इसका उल्टा कितना होगा?"

"5 ऊपर। है न?"

"हम इसे 5 भी लिखते हैं, है ना?" अतः  $-(-5) = 5$ ,  $-(-2) = 2$ , वगैरह।

अब इस बात का इस्तेमाल यह समझने में मदद देने के लिए किया जा सकता है कि जब हम ऋणात्मक संख्याओं को घटाते हैं, तो क्या होता है। अर्थात्

"जब  $-(-5) = 5$  होता है, तो  $7 - (-5)$  कितना होगा?"

उम्मीद है कि आप उत्तर 12 निकाल लेते हैं।

पहले सीखी गई बात, यानी  $-(-n) = n$ , का इस्तेमाल करके बच्चे  $-5 - (-7)$  जैसे सवाल करना भी सीख जाते हैं। वे घटाने का सामान्य नियम समझ जाते हैं और संक्रिया को आसानी से करने लगते हैं।

### अब जरा बतायें—

सवाल में दिये निर्देशों के अनुसार पूर्णांक लिखने थे। निर्देश निम्नलिखित थे—

- (i) 6 ऊपर, (ii) 4 नीचे (iii) 5 ऊपर और फिर 3 ऊपर (iv) 6 नीचे और फिर 2 ऊपर (v) 5 नीचे और फिर 12 ऊपर (vi) 8 नीचे और फिर 5 ऊपर (vii) 7 ऊपर और फिर 10 नीचे (viii) 3 नीचे फिर 5 ऊपर और फिर 2 नीचे

मोहन ने इन्हें नीचे दिखाए अनुसार लिखा—

(i) + 6

(ii) -4

(iii)  $(+5) + (+3) = +8$

(iv)  $(-6) + (-2) = -8$

(v)  $(-5) + (+12) = +7$

(vi)  $(-8) + (+5) = -3$

(vii)  $(+7) + (-10) = -3$

(viii)  $(-3) + (+5) + (-2) = +4$

मोहन ने कुछ गलतियों की है। क्या आप उसके उत्तरों की जाँच कर सकते हैं और गलतियों को सही कर सकते हैं?

## ऋणात्मक संख्याओं का गुणा

ऋणात्मक संख्याओं में गुणा की संक्रिया को परिभाषित करने के लिए हम धनात्मक संख्याओं के गुणनफल की अवधारणा को व्यवहार में लाते हैं, परन्तु यह उनके मापांक (Absolute Value) के साथ ही होता है। परिणाम का चिह्न निम्नलिखित तरीके से परिभाषित किये जाते हैं—

$$+ \times - = -$$

$$- \times + = -$$

$$- \times - = +$$

$$+ \times + = +$$

अवलोकन करने पर हम देखते हैं कि ऋणात्मक संख्याओं में गुणा की संक्रिया में दो विपरीत चिह्नों का परिणाम ऋणात्मक होता है तथा दो समान चिह्नों का परिणाम धनात्मक होता है।

उदाहरणस्वरूप—

1.  $(+3) \times (-5)$  को हम  $(-5) + (-5) + (-5) = -15$  लिखते हैं, जिसमें गुणनफल का मापांक 3 व 5 को गुणा करने के बराबर है तथा गुणनफल का चिह्न उपर्युक्त परिभाषा के अनुसार होता है।
2.  $(-7) \times (+4) = -28$
3.  $(-8) \times (-4) = 32$

## ऋणात्मक संख्याओं का भाग

हम किसी संख्या को ऋणात्मक संख्या से भाग देने के लिए उस संख्या को ऋणात्मक बनाते हुए दी गयी ऋणात्मक संख्या के मापांक से भाग देते हैं, जैसे—

15 को  $-3$  से भाग देने के लिए हम 15 को ऋणात्मक बनाकर  $-3$  के मापांक 3 से भाग करते हैं अर्थात्  $(15) \div (-3) = (-15) \div (3) = -5$

इसी प्रकार जब किसी ऋणात्मक संख्या को दूसरी ऋणात्मक संख्या से भाग देते हैं तो ऐसी स्थिति में दोनों संख्याओं का मापांक लेकर भाग की क्रिया करते हैं जैसे—

$$(-15) \div (-3) = (15) \div (3) = 5$$

## योगात्मक प्रतिलोम (Additive inverse)–

किसी पूर्णांक के विपरीत चिह्न के पूर्णांक को उसका **योगात्मक प्रतिलोम** या **योज्य प्रतिलोम** कहते हैं। पूर्णाकों की श्रेणी में शून्य (0) को छोड़कर प्रत्येक  $+p$  के लिए, एक  $-q$  का अस्तित्व होता है ताकि  $+p + (-p) = 0$  हो।  $+p$  तथा  $-p$  परस्पर विरोधी या एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम अथवा व्युत्क्रम कहा जाता है।

जैसे— 5 का योगात्मक प्रतिलोम  $-5$  है तथा  $-7$  का योगात्मक प्रतिलोम  $+7$  है। दो योगात्मक प्रतिलोम का योग शून्य होता है। जैसे—  $5 + (-5) = 0$ ,  $-5 + 5 = 0$ ; यदि दो पूर्णाकों का योग शून्य हो तो वे एक दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम कहलाते हैं।

- धनात्मक पूर्णांक जितना बड़ा होता है उसका योज्य प्रतिलोम उतना ही छोटा होता है।

### निरपेक्ष या परम मान (Absolute Value)

पूर्णाकों का निरपेक्ष मान ज्ञात करने के लिए पूर्णाकों के चिह्न पर ध्यान न देकर पूर्णांक के संख्यात्मक मान पर ध्यान दें यथा  $|-7|$  और  $|+7|$  दोनों का निरपेक्ष मान 7 एवं  $|-4|$  और  $|+4|$  दोनों का निरपेक्ष मान 4 ही होगा।

- किसी भी पूर्णांक का निरपेक्ष मान सदैव पूर्ण संख्या होता है।
- शून्य का निरपेक्ष मान शून्य ही होता है।

## पूर्णाकों का योग—

1. धनात्मक पूर्णाकों का योगफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

जैसे—  $56 + 73 = 129$ ;  $113 + 82 = 195$ ;  $20 + 30 + 15 = 65$

2. ऋणात्मक पूर्णाकों का योगफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

जैसे—  $(-5) + (-8) = -13$ ;  $-28 + (-52) = -80$ ;  $-25 + (-75) = -100$

3. जब एक धनात्मक और एक ऋणात्मक अथवा एक ऋणात्मक और एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है तो संख्या को घटा देते हैं और बड़े पूर्णांक का चिह्न उस अन्तर के पहले रख दिया जाता है। बड़े पूर्णांक का निर्णय दोनों पूर्णांकों के चिह्नों की अवहेलना करते हुए लिया जाता है।

जैसे—  $(-8) + (20) = 12$ ,  $15 + (-50) = -35$

4. दो से अधिक ऋणात्मक और धनात्मक का योगफल ज्ञात करने के लिए धनात्मक संख्याओं का योगफल एक साथ और ऋणात्मक संख्याओं का योगफल एक साथ ज्ञात करने के बाद पुनः उनका अन्तर नियम (3) के अनुसार प्राप्त कर लेते हैं।

जैसे—  $-4 + (-8) + (12) + (-18) + (5)$   
 $= -4 + (-8) + (-18) + 12 + 5$   
 $= -30 + 17$   
 $= -13$

**नोट :** एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का योगफल धनात्मक पूर्णांक होगा यदि धनात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो तथा योगफल ऋणात्मक होगा यदि ऋणात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो।

## पूर्णाकों के योग के गुण—

- 1- संवृत या संवरक गुण (Closure property)-

दो पूर्णांक संख्याओं का योग पुनः एक पूर्णांक संख्या ही होती है। यह गुण, पूर्णांक संख्याओं के योग का संवृत या संवरक गुण कहलाता है।

अर्थात्, किन्हीं दो पूर्णाकों  $a$  तथा  $b$  के लिए  $a + b$  एक पूर्णांक होता है।

उदाहरणतः  $5 + 8 = 13$ , जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

$(-3) + 5 = 2$ , जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

$19 + (-25) = -6$ , जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

$(-7) + (-8) = (-15)$ , जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

- 2- क्रम विनिमेय गुण (Commutative property)-

दो पूर्णांक संख्याओं का योगफल एवं उनके उल्टे क्रम का योगफल समान होते हैं। इस गुण को क्रम विनिमेय गुण कहते हैं।

अर्थात्, किन्हीं दो पूर्णाकों  $a$  तथा  $b$  के लिए  $a + b = b + a$  एक पूर्णांक होता है।

उदाहरणतः  $5 + 8 = 8 + 5$

$(-3) + 5 = 5 + (-3)$

$19 + (-25) = (-25) + 19$

$(-7) + (-8) = (-8) + (-7)$

- 3- साहचर्य गुण (सहचरी) (Associative property)-

किसी तीन पूर्णांक  $a$ ,  $b$  और  $c$  के लिए  $a + (b + c) = (a + b) + c$

उदाहरणतः  $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-2)] + (-3)$

$(-3) + [1 + (-7)] = [(-3) + 1] + (-7)$



#### 4- योज्य तत्समक (Additive identity)-

$$(1) \quad (-5) + 0 = -5$$

$$\text{पुनः } 0 + (-5) = -5$$

$$\Rightarrow (-5) + 0 = 0 + (-5) = -5$$

$$(2) \quad 2 + 0 = 2$$

$$\text{पुनः } 0 + 2 = 2$$

$$\Rightarrow 2 + 0 = 0 + 2 = 2$$

अतः हम कह सकते हैं कि किसी पूर्णांक  $a$  के लिए

$$\mathbf{a + 0 = a} \text{ एवं } \mathbf{0 + a = a}$$

तब 0 (शून्य) जोड़ के लिए '0' (शून्य) योज्य तत्समक कहलाता है।

#### पूर्णाकों का व्यवकलन—

पूर्णाकों में घटाने से अभिप्राय है विरोधी संख्या (अर्थात् व्युत्क्रम) को जोड़ना। इस प्रकार, यदि ' $p$ ' तथा ' $q$ ' दो पूर्णांक हैं, तो  $p - q = p + (-q)$

प्राकृत संख्याओं में  $p - q$  उसी दशा में अर्थपूर्ण संक्रिया है जब  $q < p$  होता है। किंतु पूर्णाकों में  $p - q$  अर्थपूर्ण संक्रिया है चाहे  $q < p$ ,  $q = p$  अथवा  $q > p$  हो।

#### 1- घटाव का संवरक गुण (Closure property)

दो पूर्णाकों का अन्तर एक पूर्णांक संख्या होती है, इसे घटाव का संवरक गुण कहते हैं।

अर्थात्, किन्हीं दो पूर्णाकों  $a$  तथा  $b$  के लिए  $a - b$  एक पूर्णांक होता है।

उदाहरणतः  $5 - 8 = -3$ , जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

$(-3) - 5 = -8$ , जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

$19 - (-25) = 44$ , जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

$(-7) - (-8) = 1$ , जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

$8 - 3 = 5$ , जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

#### पूर्णाकों का व्यवकलन के गुण—

1. दो पूर्णाकों का अन्तर एक पूर्णांक होता है। (संवरक गुण)

2. पूर्णांक में से 0 घटाने पर उनका मान नहीं बदलता।

3. प्रत्येक पूर्णांक का पूर्ववर्ती एवं परवर्ती भी पूर्णांक होता है।

जैसे 0 का पूर्ववर्ती  $-1$  एवं  $-1$  का पूर्ववर्ती  $-2$ ,  $-5$  का पूर्ववर्ती  $-6$  इत्यादि तथा  $-1$  का परवर्ती 0,  $-2$  का परवर्ती  $-1$ ,  $-6$  का परवर्ती  $-5$  इत्यादि।

#### पूर्णाकों का गुणा—

##### 1. धन पूर्णाकों का गुणा—

किसी दो धन पूर्णाकों के गुणा करने पर सदैव एक धन पूर्णांक प्राप्त होता है। या दो धन पूर्णाकों का गुणनफल धनात्मक होता है।

अर्थात्, माना कि  $+a$  और  $+b$  दो धन पूर्णांक हैं।

$$\text{तो } (+a) \times (+b) = +ab$$

$$\text{उदाहरणतः } 4 \times 3 = 12 \quad \text{या} \quad 3 \times 4 = 12$$



## 2. धन पूर्णांक का ऋण पूर्णांक से गुणा—

एक धन पूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक का गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल ऋणात्मक होता है।  
अर्थात्, माना कि  $+a$  और  $-b$  दो पूर्णांक हैं।

तो  $(+a) \times (-b) = -ab$

उदाहरणतः  $(-3) \times 5 = -15$

$8 \times (-4) = -32$

## 3. दो ऋण पूर्णांकों का गुणा—

किसी दो ऋण पूर्णांकों को गुणा किया जाता है तो गुणनफल सदैव धनात्मक प्राप्त होता है।  
अर्थात्, माना कि  $-a$  और  $-b$  दो ऋण पूर्णांक हैं।

तो,  $(-a) \times (-b) = +ab$

उदाहरणतः  $(-7) \times (-8) = 56$

## 4. तीन अथवा अधिक ऋण पूर्णांकों का गुणा—

- तीन अथवा अधिक ऋण पूर्णांकों का गुणा करने के लिए पहले दो पूर्णांकों का गुणनफल प्राप्त करते हैं। फिर प्राप्त गुणनफल को अन्य पूर्णांक से गुणा करते हैं।
- यदि ऋणात्मक पूर्णांक को सम बार गुणा किया जाय तो गुणनफल धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है, जबकि ऋणात्मक पूर्णांक को विषम बार गुणा किया जाय तो गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

अर्थात् दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

## पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा

गुणन की संक्रिया में भी शून्य की एक विशेष भूमिका है। किसी भी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा करने पर शून्य ही प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ, निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

$$5 \times 6 = 30$$

$$5 \times 5 = 25$$

$$5 \times 4 = 20$$

$$5 \times 3 = 15$$

$$5 \times 2 = \dots$$

$$5 \times 1 = \dots$$

$$5 \times 0 = ?$$

देखिए कि किस प्रकार गुणनफल में कमी हो रही है?

क्या आप कोई प्रतिरूप देख रहे हैं?

क्या आप अगले चरण का अनुमान लगा सकते हैं?

आपको पूर्ण संख्याओं के लिए एक योज्य तत्समक प्राप्त हुआ। किसी पूर्ण संख्या में शून्य जोड़ने पर या शून्य में पूर्ण संख्या जोड़ने पर वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। ऐसी ही स्थिति पूर्ण संख्याओं के लिए गुणनात्मक तत्समक (multiplicative identity) की है।

## पूर्णाकों में गुणन के लिए चिन्हों के नियम—

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>p×q</b>
धनात्मक $p>0$	धनात्मक $q>0$	धनात्मक $p\times q>0$
ऋणात्मक $p<0$	ऋणात्मक $q<0$	धनात्मक $p\times q>0$
धनात्मक $p>0$	ऋणात्मक $q<0$	ऋणात्मक $p\times q<0$
ऋणात्मक $p<0$	धनात्मक $q>0$	ऋणात्मक $p\times q<0$
धनात्मक $p>0$	शून्य $q=0$	शून्य $p\times q=0$
ऋणात्मक $p<0$	शून्य $q=0$	शून्य $p\times q=0$

## पूर्णाकों में गुणन के गुण—

- गुणन संवृत होता है।
- गुणन क्रमविनिमेय होता है।
- गुणन सहचारी होता है।
- गुणात्मक तत्समक का अस्तित्व है। पूर्णाकों में गुणात्मक तत्समक 1 है।
- गुणन योग पर वितरित होता है।

## पूर्णाकों में भाग के लिए चिन्हों के नियम—

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>p÷q</b>
धनात्मक $p>0$	धनात्मक $q>0$	धनात्मक $(p\div q)>0$
धनात्मक $p>0$	ऋणात्मक $q<0$	ऋणात्मक $(p\div q)<0$
ऋणात्मक $p<0$	धनात्मक $q>0$	ऋणात्मक $(p\div q)<0$
ऋणात्मक $p<0$	ऋणात्मक $q<0$	धनात्मक $(p\div q)>0$

## पूर्णाकों में भाग के गुण—

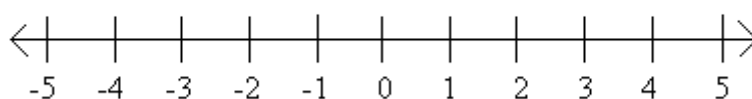
- पूर्णाकों के भाग पर सदैव संवरक गुण लागू नहीं होता है। जैसे  $3\div 4$  में भागफल पूर्णांक नहीं है।
- प्रत्येक पूर्णांक में (शून्य को छोड़कर) उसी पूर्णांक संख्या का भाग देने पर भागफल हमेशा 1 आता है। जैसे :—  $7\div 7=1$

3. शून्य को छोड़कर प्रत्येक पूर्णांक को उसके योज्य प्रतिलोम से भाग देने पर परिणाम  $-1$  प्राप्त होता है। जैसे—  $15 \div (-15) = -1$
4. शून्य में किसी भी पूर्णांक संख्या का भाग देने पर भागफल का मान शून्य ही रहता है।  
जैसे—  $0 \div 16 = 0$
5. किसी पूर्णांक संख्या में शून्य से भाग देने पर भागफल ज्ञात नहीं कर सकते। अर्थात्  $4 \div 0 = \text{अपरिभाषित}$ । अतः एक पूर्णांक का शून्य से भाग निरर्थक है।

## संख्या रेखा

पूर्णांक संख्या के श्रृंखला को दर्शाने के लिए जिस रेखा को प्रयोग में लाया जाता है, **संख्या रेखा** कहलाता है।

Number line.



संख्या रेखा एक ऐसी रेखा है जिस पर हम प्रत्येक संख्या को एक इकाई दूरी (unit distance) पर एक बिन्दु द्वारा दर्शाते हैं। इस रेखा पर 0 से 1 के बीच की दूरी, इकाई दूरी है। हर एक-दूसरे के तुरन्त बाद आनेवाली संख्याओं के बीच इकाई दूरी ही होगी। संख्या रेखा पर हम असंख्य संख्याएं दर्शा सकते हैं।

- अभियुक्ति—**
- (i) संख्या रेखा के दोनों ओर लगा तीर ( $\leftrightarrow$ ) का चिन्ह यह बताता है कि यह दोनों ओर बढ़ने के लिए स्वतंत्र है।
  - (ii) संख्या रेखा के मध्य में '0' रहता है।
  - (iii) मध्य से दायें ( $\rightarrow$ ) बढ़ने पर धनात्मक (+ve) संख्या प्राप्त होता है।
  - (iv) मध्य से बायें ( $\leftarrow$ ) बढ़ने पर ऋणात्मक (-ve) संख्या प्राप्त होता है।
  - (v) संख्या रेखा पर बायें से दायें की संख्याएं बड़ी होती है अर्थात् बायें से दायें जाने पर संख्याओं का मान बढ़ता है।
  - (vi) संख्या रेखा पर दायें से बायें की संख्याएं छोटी होती है अर्थात् दायें से बायें की ओर बढ़ने पर संख्याओं का मान घटता है।
  - (vii) एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो दायीं ओर चलते हैं।
  - (viii) एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो बायीं ओर चलते हैं।
  - (ix) एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो बायीं ओर चलते हैं।
  - (x) एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो दायीं ओर चलते हैं।

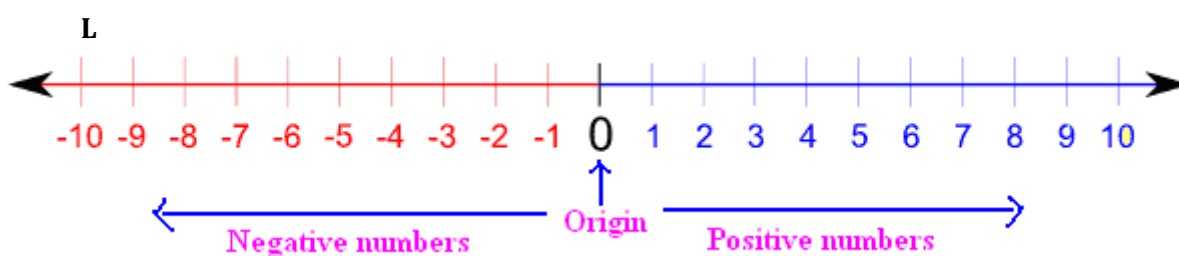
## पूर्णाकों की क्रमबद्धता:

- 1 0 से दायीं ओर जाने पर प्रत्येक संख्या अपनी पूर्ववर्ती संख्या से बड़ी होती है।
- 2 0 से बायीं ओर जाने पर प्रत्येक संख्या अपनी पूर्ववर्ती संख्या से छोटी होती है।
- 3 संख्या रेखा पर अंकित प्रत्येक पूर्णांक अपनी दायीं वाली संख्या से छोटी होती है।
- 4 संख्या रेखा पर अंकित प्रत्येक पूर्णांक अपनी बायीं वाली संख्या से बड़ी होती है।

अतः  $3 > 1$ , क्योंकि 3, 1 से दायीं ओर है।  
 $-1 > -4$ , क्योंकि  $-1$ ,  $-4$  से दायीं ओर है।  
 $2 < 4$ , क्योंकि 2, 4 से बायीं ओर है।  
 $-3 < -2$ , क्योंकि  $-3$ ,  $-2$  से बायीं ओर है।

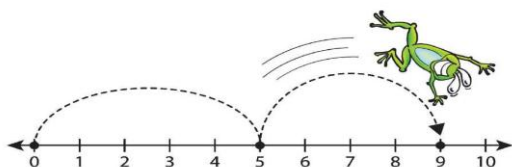
पूर्णाकों को निरूपित करने के लिए एक सरल रेखा के बिन्दुओं का प्रयोग किया जा सकता है। इसकी प्रक्रिया नीचे दी गई है।

- (i) एक सरल रेखा खींचिए तथा इसे L से नामांकित कीजिए। (यहां L पूरी रेखा को निर्दिष्ट करता है। यह इसके किसी एक बिन्दु को नामांकित नहीं करता।)
- (ii) इस पर समान अंतराल पर बिन्दु चिह्नित कीजिए।
- (iii) उसके किसी बिंदु को 0 से नामांकित कीजिए और इसे शून्य द्वारा निरूपित कीजिए।
- (iv) 0 के बायीं ओर के बिन्दुओं को क्रमानुसार -1, -2, -3, .... आदि द्वारा निरूपित कीजिए।
- (v) 0 के दायीं ओर के बिन्दुओं को क्रमानुसार +1, +2, +3, .... आदि द्वारा निरूपित कीजिए।



संख्या रेखा पर योग तथा व्यवकलन की संक्रियाएं—

(a) योग करने के लिए हम दायीं ओर चलते हैं। जैसे—  
 $5 + 4 = 9$



(b) घटाने के लिए हम बायीं ओर चलते हैं।

$$5 - 3 = 2$$



$$\text{or } 5 + (-3) = 2$$



इस अंक में इतना ही। उम्मीद है पूर्णाक संख्याओं की समझ विकसीत करने में यह अंक आपकी मदद करेगा। संदर्भ के लिए सातवीं कक्षा की पाठ्यपुस्तक का अध्ययन करें और उसमें प्रदत्त सवालों को हल करने का प्रयास करें।

धन्यवाद!

आपको यह अंक कैसा लगा? अपने सलाह और सुझाव दें—

**शशिधर उज्ज्वल, शिक्षक**

रा0 मध्य विद्यालय, सहसपुर

प्रखण्ड— बारुण, जिला— औरंगाबाद, राज्य— बिहार,

पिन— 824112

मोबाइल न0 — 7004859938

ई—मेल— [ujjawal.shashidhar007@gmail.com](mailto:ujjawal.shashidhar007@gmail.com)

टीचर्स ऑफ बिहार

वेबसाइट— [www.teachersofbihar.org](http://www.teachersofbihar.org)

ई—मेल— [teachersofbihar@gmail.com](mailto:teachersofbihar@gmail.com)

मोबाइल न0 — 7250818080